Es. 8.

Data $a > 0$, calcolare il volume di

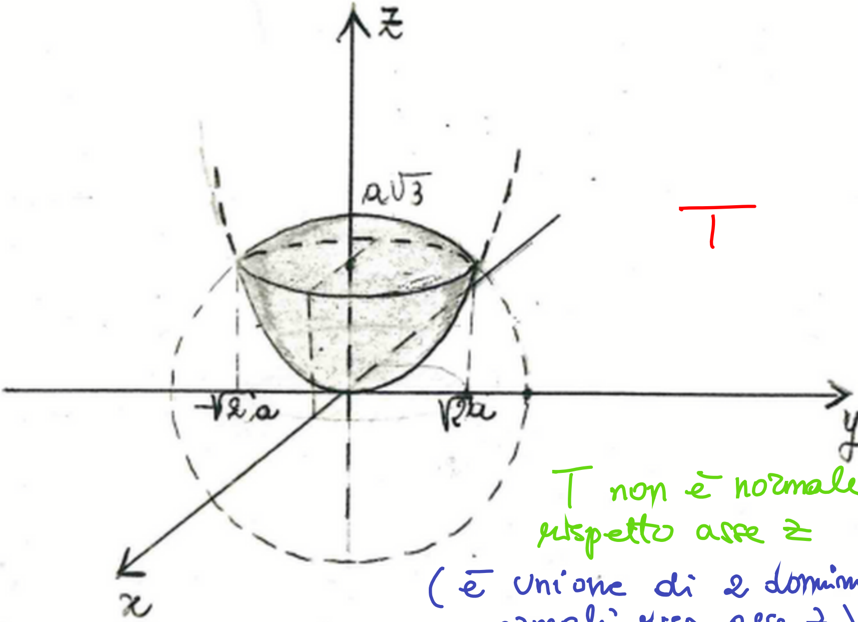
$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2,\ x^2 + y^2 \leq 2az\}$$

$\cdot\ x^2+y^2+z^2 \leq 3a^2$: regione interna alla superficie $x^2+y^2+z^2=3a^2$

$\cdot\ x^2+y^2 \leq 2az$: regione interna a $x^2+y^2=2az$

T è l'intersezione fra

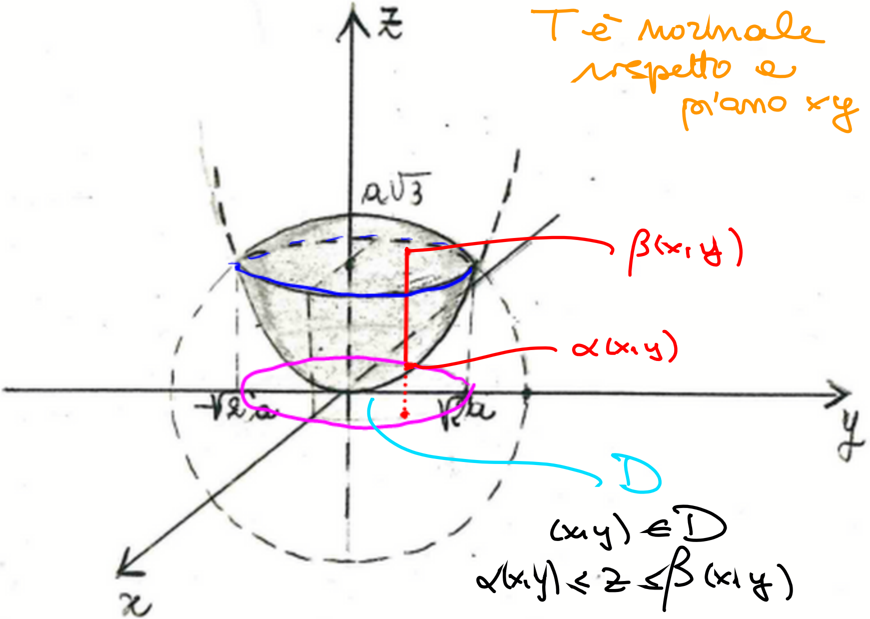
- il volume racchiuso dalla superficie sferica di centro $(0, 0, 0)$ e raggio $\sqrt{3}a$
- il volume racchiuso dal paraboloide ellittico con base circolare $x^2 + y^2 \leq 2az$



T

T non è normale rispetto asse z

(è unione di 2 domini normali risp. asse z)



T è normale rispetto a piano xy
z
$a\sqrt{3}$
$\beta(x,y)$
$\alpha(x,y)$
$-\sqrt{2}a$
$\sqrt{2}a$
y
x
D
$(x,y) \in D$
$\alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)$

D è il disco racchiuso dalla circonferenza che è proiezione sul piano $z=0$ della circonferenza intersezione fra

$$x^2+y^2+z^2=3a^2 \quad \text{e} \quad x^2+y^2=2az$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3a^2 \\ x^2+y^2=2az \end{cases} \Rightarrow 3a^2-z^2=2az$$

$$\Rightarrow z^2+2az-3a^2=0 \Rightarrow z_{1,2}= \begin{cases} -3a \\ a \end{cases}$$

$z=-3a$ non è soluz. accettabile (la quota della circonf. intersezione è positiva)

$\Rightarrow$ $z = a$ è la quota a cui si intersecano le 2 superficie, cioè lo circonferenza

$x^2 + y^2 = 2a\,(z) = 2a^2$

$D = \{ (x,y) \mid x^2+y^2 \leq 2a^2 \}$

Per $(x,y) \in D$ fissato,

$\alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)$ con

. $\alpha(x,y)$: quota su $x^2+y^2 = 2az$

$\Rightarrow$ $z = \dfrac{x^2+y^2}{2a} = \alpha(x,y)$

. $\beta(x,y)$: quota su $x^2+y^2+z^2=3a^2$

$\Rightarrow z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}=\beta(x,y)$

Quindi la rappresentazione di T come dominio normale rispetto a piano xy è

$$\begin{cases} (x,y)\in D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\leq 2a^2\} \\ \dfrac{x^2+y^2}{2a}\leq z\leq\sqrt{3a^2-x^2-y^2} \end{cases}$$

$$\mathrm{Vol}(T) = \iiint_T 1 \, dx\,dy\,dz$$

$$= \iint_D \left(\int_{\frac{x^2+y^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}} 1 \, dz \right) dx\,dy$$

$$= \iint_D \left(\sqrt{3a^2-x^2-y^2} - \frac{x^2+y^2}{2a} \right) dx\,dy$$

Ora passo alle coord. polari –

$D \rightsquigarrow \tilde{D}$: $\quad r \in [0, \sqrt{2}\, a]$

$\theta \in [0, 2\pi]$

$$= \iint_{[0,\sqrt{2}\,a]\times[0,2\pi]} \left(\sqrt{3a^2-r^2} - \frac{1}{2a}\, r^2\right) r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\, d\theta \left(\int_0^{\sqrt{2}\,a} \left(r\sqrt{3a^2-r^2} - \frac{1}{2a}\, r^3\right) dr\right)$$

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{3}\left(3a^2-r^2\right)^{3/2} - \frac{1}{8a}\, r^4\right]_0^{\sqrt{2}\,a}$$

$$= \dots\dots$$

$$= 2\pi a^3 \left(\sqrt{3} - \frac{5}{6}\right)$$